

ROZDZIAŁ XXXVII.

Mierzenie współczynnika samoindukcji.

Najprostszy sposób wyznaczenia współczynnika samoindukcji zwojnic polega na zastosowaniu wzoru, wyrażającego opór całkowity zwojnicy dla prądu zmiennego, a mianowicie:

$$\sqrt{r^2 + (z \pi L)^2},$$

gdzie r oznacza opór omiczny zwojnicy,
 z — liczbę zmian prądu na sekundę,
 L — współczynnik samoindukcji.

Przez badaną zwojnicę przepuszczamy prąd i pod napięciem e , poczem, oprócz siły i napięcia prądu, mierzymy jeszcze moc prądu W i liczbę zmian prądu na sekundę z .

Według prawa Ohma:

$$i = \frac{e}{\sqrt{r^2 + (z \pi L)^2}},$$

a według prawa Joule'a

$$W = i^2 \cdot r.$$

Z tych dwóch równań otrzymamy:

$$L = \frac{1}{z \pi \cdot i} \sqrt{e^2 - \frac{W^2}{i^2}}.$$

Wyrażając W w watach, e w woltach, i w amperach, otrzymamy L w henryach.

Jeżeli nie chodzi o pomiary bardzo dokładne, to można stosować zwykłe źródła prądu zmiennego, nie wytwarzające siły elektromotorycznej ściśle sinusoidalnej, albowiem składowe napięcia o większej liczbie okresów na sekundę wywierają wpływ bardzo mały na wyniki tego pomiaru.

Powyżej wyłuszczonego sposobu wyznaczania współczynnika samoindukcji może być stosowany również w tym razie, gdy zwojnica ma rdzeń żelazny — o ile opór obwodu magnetycznego zmienia się w stopniu nieznacznym w danych warunkach magnesowania żelaza. ¹⁾

Moc prądu, zmierzona watomierzem, stanowi w tym przypadku moc, która przetwarza się na ciepło nie tylko w drutach zwojnicy, ale i w żelazie. Wyraz $\frac{W}{i^2}$

¹⁾ Patrz rozdział XXV, § 3.

oznacza wtedy t. zw. opór omiczny czynny, nieco większy od rzeczywistego, wyraz zaś:

$$\sqrt{e^2 - \frac{W^2}{i^2}}$$

oznacza pewną siłę elektromotoryczną, nieco mniejszą od rzeczywistej elektromotorycznej siły samoindukcji.

Rys. 413 wyobraża układ wektorów: e — napięcie na końcówkach zwojnicy, i — prąd, $ir = Oc$ — omiczny spadek napięcia, $E_s = bc$ — rzeczywistą siłę elektromotoryczną samoindukcji.

Moc prądu W wyraża się tu wzorem:

$$W = e \cdot i \cdot \cos \varphi,$$

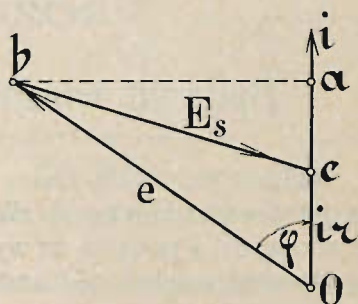
przeto:

$$\frac{W}{i} = e \cdot \cos \varphi.$$

Na wykresie $e \cdot \cos \varphi$ wyraża się długością Oa , wyraz zaś:

$$\sqrt{e^2 - \frac{W^2}{i^2}}$$

długością ab .



Rys. 413.

Jeżeli więc współczynnik samoindukcji obliczymy według wzoru:

$$L = \frac{1}{2 \pi \cdot i} \sqrt{e^2 - \frac{W^2}{i^2}},$$

to współczynnik ten będzie się równał współczynnikowi samoindukcji pewnej zwojnicy bez żelaza, która ma opór omiczny równy oporowi czynnemu zwojnicy z żelazem.

Jeżeli chodzi o wyznaczenie bardzo małego współczynnika samoindukcji, to w praktyce porównywa się zwykle taką zwojnicę z inną, mającą wiadomy współczynnik samoindukcji, przez włączenie obydwuch w układ mostka Wheatstone'a, zasilany naprzemian prądem zmiennym i stałym. ¹⁾

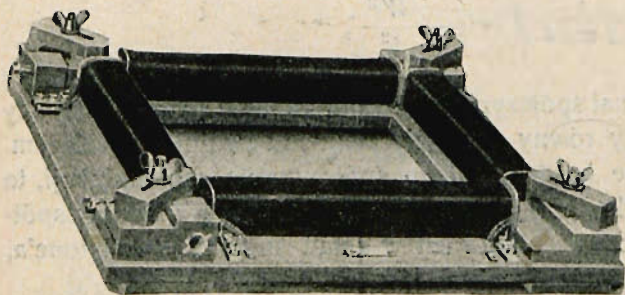
¹⁾ Szczegóły sposobu takiego porównywania współczynników samoindukcji znajdzie czytelnik w przytoczonej poprzednio książce p. K. Drewnowskiego.

ROZDZIAŁ XXXVIII.

Badanie własności magnetycznych żelaza.

Badanie techniczne żelaza pod względem jego własności magnetycznych polega przede wszystkim na określeniu strat, ponoszonych skutkiem histerezy i prądów wirowych, a ponadto na wyznaczeniu krzywej, wyrażającej zależność indukcji magnetycznej w żelazie od liczby amperozwojów, przypadających na jeden centymetr średniej linii magnetycznej.

1. Określenie strat. W celu określenia strat w żelazie stosuje się obecnie najczęściej przyrząd, zbudowany przez Epsteina (rys. 414), złożony z czterech je-



Rys. 414.

dnakowych rdzeni żelaznych, utworzonych z pasków blachy żelaznej, wyciętych z dużych arkuszy blachy w połowie wzdłuż kierunku walcowania i w połowie w poprzek. Długość każdego paska wynosi 500 mm, szerokość — 30 mm. Wszystkie cztery rdzenie ważą razem 10 kg. Ze względu na izolację paski żelazne przełożone są paskami papieru. Na

rdzenie nasadza się zwojnice, po 150 zwojów w każdej, i przepuszcza się przez nie prąd zmienny o 50 okresach na sekundę.

Siłę prądu dobieramy w taki sposób, ażeby w żelazie powstała indukcja magnetyczna o wartości maksymalnej, wynoszącej raz 10 000, a drugi raz 15 000 gausów.

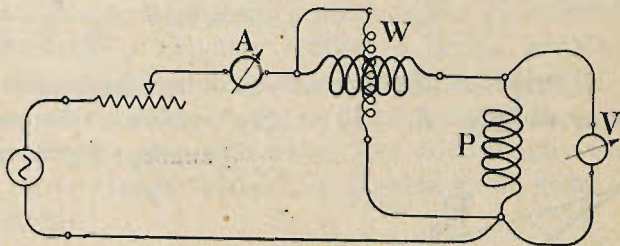
Za pomocą dokładnego watomierza określamy moc prądu płynącego do zwojnic, amperomierzem mierzymy siłę prądu, a woltomierzem napięcie, w celu kontrolowania gęstości linii magnetycznych. Jednocześnie wyznacza się częstość zmian prądu za pomocą przyrządu, opisanego w rozdziale XXXIII, lub też oblicza się ją według liczby obrotów prądnicy na minutę, dostarczającej prąd zmienny. Jeżeli

prądnicą obraca się z prędkością n obrotów na minutę, i liczba biegunów indukcyjnych jest p , to liczba zmian prądu na sekundę oblicza się ze wzoru: ¹⁾

$$z = \frac{p \cdot n}{60}.$$

Na rys. 415 wskazany jest układ połączeń przyrządu Epsteina P , z przyrządami pomiarowymi: amperomierzem A , watomierzem W i woltomierzem V . Z lewej strony rysunku wskazana jest prądnicą prądu zmiennego, stanowiąca źródło prądu.

Wymierzwszy zawczasu opór zwojnic przyrządu P , obliczamy moc prądu, przetwarzającą się na ciepło w zwojnicach. Tę moc odejmujemy od całej mocy, wskazanej przez watomierz; reszta stanowić będzie straty w żelazie, powstałe skutkiem histerezy i prądów wirowych.



Rys. 415.

Wychodząc ze wskazań, odczytanych na woltomierzu, łatwo można obliczyć gęstość linii magnetycznych w żelazie na podstawie rozumowania następującego: ²⁾

Napięcie e na końcówkach przyrządu jest prawie równe sile elektromotorycznej samoindukcji, albowiem opór omiczny zwojnic jest niewielki, a kąt φ znaczny. Jeżeli więc nie chodzi o pomiary bardzo dokładne, to można przyjąć, że e równa się E_s , a wtedy według wzorów rozdziału XXV § 3 otrzymamy:

$$\bar{e} = -\bar{E}_s,$$

$$m \cdot N_t = \bar{e} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot \sin \frac{2\pi t}{T},$$

gdzie m oznacza liczbę zwojów wszystkich zwojnic przyrządu (rys. 414), N_t —strumień magnetyczny w żelazie w chwili t . Z tego równania:

$$\bar{N} = \frac{\bar{e}}{m} \cdot \frac{1}{z\pi}.$$

Jeżeli zaś oznaczmy przekrój poprzeczny rdzenia żelaznego przez S , ³⁾ a maksymalną indukcję magnetyczną w żelazie przez \bar{B} , to:

$$\bar{N} = \bar{B} \cdot S,$$

a więc:

$$\bar{B} = \frac{\bar{e}}{m \cdot S} \cdot \frac{1}{z\pi}.$$

¹⁾ Przy przejściu drutu, w którym wzbudza się prąd indukcyjny, od jednego bieguna do następnego odbywa się zmiana kierunku prądu.

²⁾ Uzasadnienie niektórych powołanych tu twierdzeń znajduje się w rozdziale XXV § 3.

³⁾ Przekrój określa się podług ciężaru i wymiarów blach. Ciężar właściwy przyjmuje się 7,7 dla żelaza zwykłego i 7,5 dla nakrzemionego.

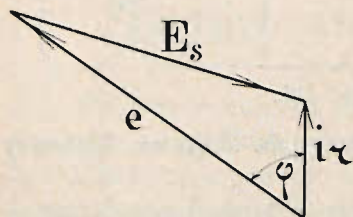
Ponieważ woltomierz wskazuje napięcie czynne w woltach, przeto chcąc otrzymać \bar{B} w jednostkach bezwzględnych, należy wprowadzić wartość czynną napięcia, wyrażoną w jednostkach bezwzględnych:

$$\bar{B} = \frac{e \cdot \sqrt{2} \cdot 10^8}{m \cdot S} \cdot \frac{1}{z \pi},$$

albo:

$$\bar{B} = 0,45 \cdot \frac{e}{m \cdot S \cdot z} \cdot 10^8 \cdot ^1)$$

Przy bardziej dokładnych obliczeniach, zamiast e , wprowadzić należy w ten wzór wielkość E_s . E_s obliczyć można z trójkąta (rys. 416), w którym e , $i r$ są znane, a kąt φ znajduje się ze wzoru:



Rys. 416.

$$\cos \varphi = \frac{W}{e i},$$

gdzie W wyraża moc prądu, wskazaną przez woltomierz, a $e i$ — moc pozorną.

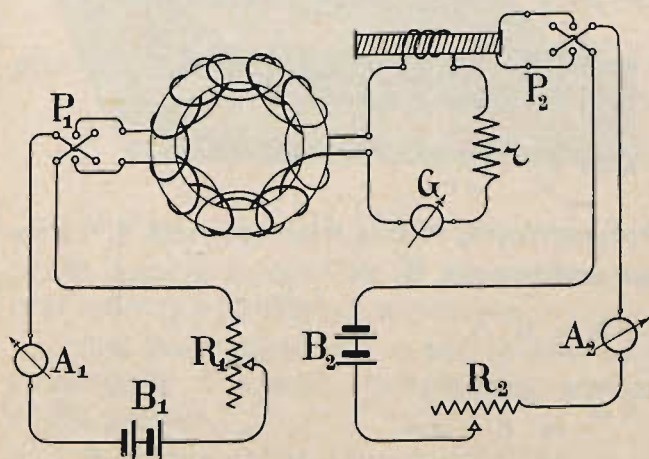
Jako wynik omawianych tu pomiarów, otrzymuje się stratę w watach na 1 kg żelaza.

W praktyce fabrycznej często stosowane są obecnie sposoby porównawcze. Straty w żelazie nieznanym wyznaczają się przez porównanie ze stratami w żelazie normalnym, uprzednio dokładnie zbadanym.

2. Wyznaczanie krzywej magnetyzmu w żelazie. Krzywa magnetyzmu wyraża zależność indukcji magnetycznej w żelazie od liczby amperozwojów magnetyzujących, które przypadają na

1 cm linii magnetycznej w żelazie. ²⁾ Najdokładniejszy sposób wyznaczania takiej krzywej opiera się na zastosowaniu galwanometru balistycznego.

Żelazo bierzemy w kształcie pierścienia (rys. 417). Pierścień ten owijamy dwoma zwojniciami niezależnymi. Jedną z nich zasilamy prądem z baterji B_1 przez opornik R_1 , amperomierz A_1 i przełącznik P_1 , za pomocą którego można zmieniać kierunek prądu w tej zwojnicy. Druga zwoj-



Rys. 417.

¹⁾ Spółczynnik 0,45 zależy jeszcze od kształtu krzywej napięcia i może różnić się od podanego o parę odsetków.

²⁾ Patrz rys. 63 i 64 na str. 64.

nica, znajdująca się na pierścieniu, łączy się przez opór r i zwojnicę pomocniczą z galwanometrem balistycznym. Wewnątrz zwojnicy pomocniczej znajduje się długa i wąska zwojnica, zasilana prądem z baterji B_2 przez opornik R_2 , amperomierz A_2 i przełącznik P_2 , za pomocą którego można zmieniać kierunek prądu w tej zwojnicy.

Ażeby wyznaczyć krzywą magnetyzmu w żelazie pierścienia, trzeba przede wszystkim przewzorcować galwanometr balistyczny. W tym celu puszczaemy prąd do zwojnicy długiej, mającej m' zwojów i za pomocą przełącznika P_2 odwracamy kierunek prądu; wtedy przez indukcję w zwojnicy krótkiej o liczbie zwojów m'' powstaje chwilowo prąd, wywołujący odchylenie galwanometru balistycznego.

Galwanometr ten różni się od zwykłego tym, że ruchome jego części mają dość znaczną masę, skutkiem czego okres jego wahań jest dość długi. Pierwsze odchylenie galwanometru balistycznego jest proporcjonalne do tej ilości elektryczności, jaka przezeń przepłynęła.

Oznaczmy prąd w chwili t przez i_t , odchylenie galwanometru przez α , a stałą przez C ; otrzymamy wtedy wzór.

$$\int_0^t i_t \cdot dt = C \cdot \alpha \dots \dots \dots (a)$$

Oznaczmy dalej siłę elektromotoryczną, wywołaną w zwojnicy krótkiej przez E , współczynnik samoindukcji obwodu przez L , a opór całkowity obwodu, w który jest włączony galwanometr balistyczny przez R ; wtedy na zasadzie prawa Ohma:

$$E_t - L \cdot \frac{di_t}{dt} = i_t \cdot R.$$

Mnożąc to równanie przez dt i całkując w ciągu czasu t_1 , kiedy przebiegał prąd chwilowy, otrzymamy:

$$\int_0^{t_1} E_t \cdot dt - \int_0^{t_1} L \cdot di_t = R \cdot \int_0^{t_1} i_t \cdot dt;$$

czyli, uwzględniając, że $\int_0^{t_1} L \cdot di_t = 0$, ponieważ w chwili 0 i w chwili t_1 prąd równa się zero, otrzymamy:

$$\int_0^{t_1} E_t \cdot dt = R \cdot \int_0^{t_1} i_t \cdot dt,$$

albo, ze względu na równanie (a):

$$\int_0^{t_1} E_t \cdot dt = R \cdot C \cdot \alpha \dots \dots \dots (b)$$

Oznaczmy teraz strumień magnetyczny, powstający w długiej zwojnicy pod wpływem przebiegającego w niej prądu i_t , przez N_t ; wtedy:

$$E_t = - \frac{dN_t}{dt} \cdot m''$$

$$\int_0^{t_1} E_t \cdot dt = - [N]_0^{t_1} m''.$$

Prąd indukcyjny w obwodzie galwanometru powstaje skutkiem odwrócenia kierunku prądu, a więc i strumienia magnetycznego w długiej zwojnicy. Oznaczmy strumień magnetyczny w chwili 0 przez $(+N)$, to w chwili t_1 będzie on $(-N)$, wtedy z poprzedniego równania otrzymamy:

$$\int_0^{t_1} E_t \cdot dt = 2 N \cdot m''.$$

Uwzględniając zaś równanie (b), otrzymamy:

$$2 N \cdot m'' = R C \cdot \alpha;$$

skąd:

$$N = \frac{R \cdot C}{2 m''} \cdot \alpha.$$

Albo też, zakładając, że:

$$\frac{R C}{2} = K,$$

gdzie K oznacza w danych warunkach stałą, otrzymamy:

$$N = \frac{K}{m''} \cdot \alpha.$$

Według wzoru, wyprowadzonego na str. 75, strumień indukcji magnetycznej wewnątrz długiej i cienkiej zwojnicy wyraża się wzorem: ¹⁾

$$N = \frac{4 \pi \cdot m' \cdot i}{l} \cdot s.$$

Mając zaś N i α , obliczymy K z wyrazu:

$$K = \frac{N \cdot m''}{\alpha}.$$

Znajdując szereg odchyłeń α przy różnych N , można sprawdzić, o ile w danych warunkach doświadczenia wielkość K jest stałą.

Mając w ten sposób wywzorcowany galwanometr, puszczaemy prąd z baterji B_1 do zwojnicy, nawiniętej na pierścieniu żelaznym, i za pomocą przełącznika P_2 odwracamy kierunek tego prądu, zachowując obwód galwanometru balistycznego bez zmiany. Wtedy w zwojnicy drugiej, nawiniętej na pierścieniu i połączonej z galwanometrem balistycznym, powstanie siła elektromotoryczna indukcji, która wywoła chwilowo prąd w obwodzie galwanometru balistycznego, odchylający go o kąt α' .

Z poprzednich wywodów wypada, że kąt ten będzie proporcjonalny do strumienia magnetycznego w żelazie, który przy odwróceniu kierunku prądu w zwojnicy magnesującej, zmienił swój kierunek. Oznaczmy ten strumień przez N' ; wtedy związek pomiędzy strumieniem N' a odchyleniem galwanometru balistycznego wyrazi się wzorem:

$$N' = \frac{K}{m_2} \cdot \alpha'.$$

¹⁾ Zwojnica nie ma rdzenia żelaznego, więc, w jednostkach bezwzględnych elektromagnetycznych $\mu = 1$.

gdzie K oznacza stałą, otrzymaną z powyższego wzorcowania, a m_2 — liczbę zwojów zwojnicy na pierścieniu żelaznym, połączonej z galwanometrem balistycznym.

Z tego wzoru możemy obliczyć N' . Mając zaś przekrój poprzeczny pierścienia żelaznego S' , łatwo też obliczymy indukcję magnetyczną B w żelazie ze wzoru:

$$B = \frac{N'}{S'}.$$

Oznaczając długość średniego obwodu pierścienia przez l' , a prąd przez J , otrzymamy liczbę amperozwojów zwojnicy magnesującej, przypadającą na jednostkę długości średniej linii magnetycznej, ze wzoru:

$$\frac{J \cdot m_1}{l'}.$$

Dla uniknięcia większego błędu, z powodu niejednostajnej indukcji w przekroju poprzecznym pierścienia, należy stosować pierścienie o przekroju prostokątnym; bok krótszy przekroju, skierowany wzdłuż średnicy pierścienia, może wynosić najwyżej $\frac{1}{50}$ część tej średnicy. Można także wprowadzać poprawkę na niejednostajny rozkład indukcji magnetycznej przy obliczaniu długości średniej linii indukcji.

Wyznaczenie wielkości B i $\frac{J \cdot m_1}{l'}$ przeprowadza się przy szeregu prądów stopniowo wzrastających, a jako wynik tego badania wykreśla się krzywą, wyrażającą zależność indukcji magnetycznej w żelazie od tej liczby amperozwojów zwojnicy magnesującej, jaka przypada na jeden centymetr średniej linii magnetycznej.

Układ przyrządów, podany na rys. 417, daje także możliwość wyznaczania całkowitej krzywej histerezy, jeżeli zamiast odwracania kierunku prądu, zmieniać będziemy stopniowo, skokami, siłę prądu magnesującego i przez odchylenie galwanometru balistycznego mierzyć przyrost strumienia magnetycznego.

W praktyce fabrycznej rzadko bywa stosowany sposób badania wyżej podany; najczęściej porównywa się tam tylko żelazo gatunku nieznanego z żelazem znanym. Do takiego porównania uznano obecnie za najwłaściwsze sposoby, oparte na porównywaniu prądów indukcyjnych, wywoływanych za pomocą strumieni magnetycznych, przebiegających przez porównywane ze sobą paczki blach żelaznych.

ROZDZIAŁ XXXIX.

Dokładność pomiarów.

1. Pojęcia i wzory zasadnicze. Przy wszelkich pomiarach należy zdać sobie sprawę z tego, jak wielki jest błąd, który popełniamy przy pomiarze, wykonanie bowiem pomiaru z zupełną dokładnością jest rzeczą niemożliwą.

Należy tu rozważyć pomiary dwojakie: pomiar prosty pewnej wielkości za pomocą jednego przyrządu mierniczego, a następnie pomiar złożony, przy którym wielkość niewiadomą znajduje się przez obliczenie jej z kilku innych wielkości, wyznaczonych przez pomiar prosty.

Rozważmy przedewszystkiem pomiar prosty. Oznaczmy wartość rzeczywistą pewnej wielkości przez A , a wartość, otrzymaną z pomiaru, przez A' ; wtedy różnica

$$A - A' = x$$

stanowi błąd bezwzględny pomiaru.

Liczba zaś:

$$\frac{x}{A} = y$$

stanowi błąd względny. Znaczenie praktyczne ma oczywiście przedewszystkiem błąd względny.

Jeżeli mamy do czynienia z pomiarem złożonym, to wielkość A , stanowiąca przedmiot pomiaru, jest funkcją szeregu innych wielkości, mierzonych bezpośrednio. Oznaczmy te wielkości przez u , v , z i t. d.; wtedy:

$$A = f(u, v, z \dots).$$

Błąd popełniony przy wyznaczeniu wielkości A wynika z całego szeregu błędów popełnianych przy mierzeniu wielkości u , v , $z \dots$

Oznaczmy narazie błędy w pomiarze poszczególnych wielkości przez ΔA , Δu , Δv i t. d., wtedy

$$\Delta A = f[(u + \Delta u), (v + \Delta v), (z + \Delta z) \dots] - f(u, v, z \dots).$$

Ponieważ błędy dobrych pomiarów są zwykle niewielkie i wynoszą najwyżej setne części odpowiednich wielkości, wyraz ΔA możemy uważać za różniczkę i napisać:

$$dA = \frac{\partial f(u, v, z \dots)}{\partial u} du + \frac{\partial f(u, v, z \dots)}{\partial v} dv + \frac{\partial f(u, v, z \dots)}{\partial z} dz + \dots^1).$$

¹⁾ $\frac{\partial f(u, v, z \dots)}{\partial u}$ — oznacza funkcję pochodną od $f(u, v, z \dots)$ wziętą według zmiennej u przy założeniu, że inne zmienne nie ulegają zmianie.

Błąd względny będzie zatem: $\frac{dA}{A}$.

Załóżmy teraz, że funkcja f ma postać następującą:

$$A = u^m \cdot v^n \cdot z^k \dots,$$

wtedy:

$$\frac{dA}{A} = \frac{v^n \cdot z^k \dots m \cdot u^{m-1} \cdot du + u^m \cdot z^k \dots n \cdot v^{n-1} \cdot dv + u^m \cdot v^n \dots k \cdot z^{k-1} \cdot dz \dots}{u^m \cdot v^n \cdot z^k \dots},$$

albo:

$$\frac{dA}{A} = m \frac{du}{u} + n \frac{dv}{v} + k \frac{dz}{z} + \dots$$

Wzór ten wskazuje, że błąd względny, popełniany przy określaniu wielkości A , równa się w tym przypadku sumie błędów względnych, popełnianych przy mierzeniu wielkości u , v , $z \dots$, pomnożonych odpowiednio przez potęgi, w których te wielkości wchodziły w skład funkcji, wyrażającej wielkość A .

Stąd wynika ważna wskazówka praktyczna. Jeżeli np. potęga m jest liczbą całkowitą, to odpowiedni wyraz we wzorze błędu ogólnego będzie m razy większy od samego błędu przy pomiarze wielkości u . Jeżeli natomiast potęga n jest ułamkowa, i równa się np. $\frac{1}{p}$, to odpowiedni wyraz we wzorze błędu ogólnego będzie p razy mniejszy od błędu, popełnionego przy pomiarze wielkości v .

Wobec tego wielkości, wchodzące w skład funkcji w potęgach większych od jednostki, powinny być mierzone z większą dokładnością, niż wielkości, wchodzące w skład funkcji w potęgach jednostkowych lub mniejszych od jednostki, np. pod pierwiastkiem.

Rozważmy jeszcze inny przykład funkcji, mianowicie:

$$A = u + v + z + \dots$$

Wtedy:

$$dA = du + dv + dz + \dots,$$

a zatem:

$$\frac{dA}{A} = \frac{du + dv + dz + \dots}{u + v + z}.$$

W tym przypadku błąd bezwzględny w oznaczeniu wielkości A znajdujemy przez dodawanie błędów bezwzględnych w pomiarach poszczególnych wielkości. Jeżeli znaki błędów są zgóry niewiadome, a więc jeśli błąd może być dodatni lub ujemny, to dla obliczenia największego możliwego błędu należy przyjąć dla wszystkich błędów znaki jednakowe.

Dla osiągnięcia jaknajwiększej dokładności przy pomiarach, należy warunki pomiarów tak wybierać, aby błąd względny był jaknajmniejszy.

Poprzednio mieliśmy wzór:

$$dA = \frac{\partial f(u, v, z \dots)}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial f(u, v, z \dots)}{\partial v} \cdot dv + \frac{\partial f(u, v, z \dots)}{\partial z} \cdot dz \dots$$

skąd błąd względny będzie:

$$\frac{dA}{A} = \frac{\partial f(u, v, z \dots)}{\partial u} \cdot \frac{du}{f(u, v, z \dots)} + \frac{\partial f(u, v, z \dots)}{\partial v} \cdot \frac{dv}{f(u, v, z \dots)} + \frac{\partial f(u, v, z \dots)}{\partial z} \cdot \frac{dz}{f(u, v, z \dots)} + \dots$$

Jeśli $\frac{dA}{A}$ ma być jaknajmniejsze, to i każdy ze składników powinien być jaknajmniejszy, słowem, pomiar należy przeprowadzić w warunkach, gdy funkcje:

$$\frac{1}{f(u, v, z \dots)} \cdot \frac{\partial f(u, v, z \dots)}{\partial u}, \frac{1}{f(u, v, z \dots)} \cdot \frac{\partial f(u, v, z \dots)}{\partial v}, \frac{1}{f(u, v, z \dots)} \cdot \frac{\partial f(u, v, z \dots)}{\partial z} \text{ i t. d.}$$

mają wartość minimum. ¹⁾ Jeżeli funkcja nie ma wartości minimum, to należy obrać takie warunki pomiarów, aby wartość jej była możliwie małą.

2. Dwa rodzaje błędów. Wśród błędów, popełnianych przy pomiarach, należy odróżniać dwa rodzaje błędów: błędy systematyczne i błędy przypadkowe.

Błędy systematyczne są to takie błędy, które wynikają z jakichkolwiek stałych niedokładności w samym przyrządzie mierniczym, albo też powstają pod działaniem czynników zewnętrznych, wpływających na wskazania przyrządów.

Błędy zaś przypadkowe wynikają głównie z powodu niedoskonałości wzroku, słuchu i uwagi ludzkiej, a nadto także pod działaniem czynników zmiennych, wywołujących niedokładność wskazań przyrządów i zmieniających się w ten sposób, że trudno dostrzedz w tych zmianach jakąkolwiek wyraźną prawidłowość.

Jako przykład tych dwóch rodzajów błędów można przytoczyć błędy, spotykane przy pomiarze siły prądu amperomierzem. Niedokładność we wzorcowaniu przyrządu wywołuje błędy systematyczne, albowiem amperomierz wskazuje stale zbyt mało, lub też zbyt wiele; natomiast błędy, popełniane przez niedokładność spostrzeżenia położenia wskazówki są błędami przypadkowymi i zależnie od okoliczności mogą być dodatnie lub ujemne.

Innego rodzaju błędy systematyczne wyniknąć mogą pod wpływem czynników postronnych. Jeżeli np. mierzyć będziemy prąd stały amperomierzem elektrodynamicznym i nie zwrócimy uwagi na wpływ pola magnetycznego ziemskiego, to przy takim postępowaniu popełniać będziemy również błędy systematyczne.

Dla usunięcia błędów systematycznych, niezbędną jest rzeczą wykryć ich przyczynę. Uskutecznić to można rozmaicie, zależnie od okoliczności. Jeżeli przyczyna tkwi w złym wzorcowaniu przyrządu, to wykryć to łatwo, porównyując ten przyrząd z innym przyrządem, dokładniejszym. Jeżeli natomiast przy pomiarze można się spodziewać wpływów postronnych, to trzeba próbować zmieniać warunki, w jakich odbywa się pomiar.

¹⁾ Patrz przykład odnajdywania warunków takiego minimum w rozdziale XXXV, § 4.

Niektórych błędów systematycznych można uniknąć zupełnie, usuwając wpływ czynnika, który je wywołuje. Błąd jednak, wynikający np. z niedokładności wzorcowania przyrządu, może być tylko zmniejszony. Przeprowadzając wzorcowanie jaknajdokładniej, możemy zmniejszyć go do pewnej granicy, lecz nie możemy usunąć go całkowicie.

Błędów przypadkowych usunąć niepodobna. Można je tylko zmniejszyć przez skupienie uwagi i zastosowanie urządzeń pomocniczych dla zwiększenia dokładności wskazań. Przy odczytywaniu wskazań przyrządów wskazówkowych, należy zważać, ażeby kierunek od oka do wskazówki był prostopadły do powierzchni skali; jeżeli zaś pod wskazówką znajduje się lustro, to przy odczytywaniu położenia wskazówki na skali, wskazówka powinna pokrywać swój obraz w lustrze.

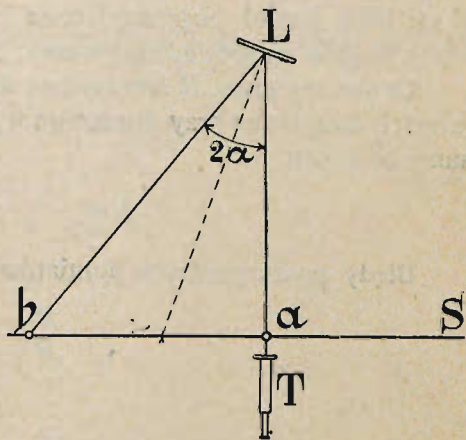
Wogóle przy pomiarach dążyć należy do otrzymania jaknajwiększego odchylenia każdego przyrządu mierniczego, a to dlatego, że błąd względny jest odwrotnie proporcjonalny do wartości bezwzględnej odczytanego wskazania. Wyjątek stanowią tu tylko wskazania, odczytywane na skali prostej, stosowanej przy przyrządach ze zwierciadłem. Na rys. 418 widzimy odpowiedni układ przyrządów, gdzie L oznacza zwierciadło, umocowane na części ruchomej przyrządu mierniczego, S — skalę z podziałkami, T — lunetę.

Oznaczając wskazanie na skali a b przez S , odległość osi lusterka od skali przez D i kąt odchylenia lusterka od położenia równoległego do skali przez α , otrzymamy na zasadzie prawa równości kątów padania i odbicia promienia świetlnego:

$$\frac{S}{D} = \tan 2\alpha,$$

skąd:

$$S = D \cdot \tan 2\alpha.$$



Rys. 418.

Wzór ten stwierdza, że wskazanie S nie jest proporcjonalne do α , i że tylko przy niewielkich odchyleniach lusterka można bez popełnienia wielkiego błędu, uważać α za proporcjonalne do S . Dla zdania sobie sprawy, jakie odchylenia czynią zadość powyższemu warunkowi, podaję tu, według Kohlrauscha, krótkie zestawienie liczb, jakie odjąć należy od wskazań odczytanych na skali, ażeby otrzymać wielkości ściśle proporcjonalne do kąta α . Wskazania na skali i odległość D podane są w jednostkach jednakowych:

$D \backslash S$	50	100	150	200	250
1000	0,04	0,33	1,11	2,60	5,02
1400	0,02	0,17	0,57	1,34	2,61
1800	0,01	0,10	0,35	0,82	1,59
2400	0,01	0,06	0,19	0,46	0,90

Z tego zestawienia wynika, że przy skali milimetrowej i najczęściej stosowanej odległości lunety od zwierciadła, wynoszącej 1000 mm, najodpowiedniejsze odchylenia wynosić powinny około 100 mm, wtedy poprawka będzie zaledwie 0,33%. Takie właśnie odchylenia stosowane są najczęściej w praktyce.

Jeżeli zaś zachodzi konieczna potrzeba zastosowania większych odchyleń, to trzeba albo zwiększyć odległość skali i lunety od lusterka, albo też wprowadzić poprawki.

3. Wyrównywanie błędów. Zmniejszenie wpływu błędów przypadkowych na wynik ostateczny może być osiągnięte przez powtórzenie wielokrotne pomiaru. W praktyce przy pomiarach niezbyt dokładnych zwykle powtarzamy pomiar trzy albo pięć razy, przy pomiarach zaś bardzo dokładnych — 10 razy i więcej. Średnia arytmetyczna ze wszystkich wyników takich pomiarów wyraża wartość najprawdopodobniejszą mierzonej wielkości.¹⁾ O ile warunki wykonania pomiarów pozostają bez zmiany, dokładność pomiaru będzie tym większa, im więcej razy powtórzymy pomiar. Gdy mamy wyniki szeregu pomiarów jednej i tej samej wielkości, to dla oceny wartości tych pomiarów pod względem błędów przypadkowych miarodajnymi są: błąd średni poszczególnego pomiaru i błąd wartości średniej. Dla tych dwóch błędów wyprowadzimy wzory, za pomocą których można je obliczać.

Oznaczmy przez R rzeczywistą wartość mierzonej wielkości przez A_1, A_2, \dots, A_n wartości, otrzymane przy poszczególnych pomiarach, wtedy średnią wartość otrzymamy ze wzoru:

$$A = \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_n}{n} \dots \dots \dots (a)$$

Błędy poszczególnych pomiarów będą:

$$\begin{aligned} R - A_1 &= x_1, \\ R - A_2 &= x_2, \\ &\dots \dots \dots \\ R - A_n &= x_n. \end{aligned}$$

Średnim błędem poszczególnego pomiaru nazywamy wyraz:

$$s = \pm \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} \dots \dots \dots (b)$$

Ponieważ liczb: x_1, x_2, \dots, x_n nie znamy, z tego więc wzoru obliczyć s nie możemy.

Wyprowadzimy wzór inny. Załóżmy:

$$\begin{aligned} A - A_1 &= \alpha_1, \\ A - A_2 &= \alpha_2, \\ &\dots \dots \dots \\ A - A_n &= \alpha_n. \end{aligned}$$

¹⁾ O prawie błędów czytelnik znajdzie wiadomości w książce p. A. B. Danilewicz: „Metoda najmniejszych kwadratów”. Tam też przytoczony jest dowód powyższego twierdzenia. Z tego dzieła zaczerpnąłem sposób wyprowadzenia dalej podanych wzorów.

Wtedy, oznaczając dowolne spostrzeżenie znacznikiem λ , otrzymamy:

$$\begin{aligned}x_{\lambda} &= R - A_{\lambda}, \\A_{\lambda} &= A - \alpha_{\lambda}.\end{aligned}$$

Z tych dwóch równań wynika, że:

$$x_{\lambda} = R - A + \alpha_{\lambda}.$$

Różnica $R - A$ stanowi błąd średniej wartości, otrzymanej z rozważanych pomiarów według wzoru (a).

Oznaczmy ten błąd przez S , wtedy:

$$\begin{aligned}R - A &= S, \\x_{\lambda} &= S + \alpha_{\lambda}.\end{aligned}\quad (c)$$

Z tego wzoru możemy otrzymać dwa równania w sposób następujący:

Podnosząc obie strony równania (c) do drugiej potęgi, otrzymamy:

$$x_{\lambda}^2 = S^2 + 2 S \alpha_{\lambda} + \alpha_{\lambda}^2.$$

Jeśli n takich równań, napisanych dla poszczególnych spostrzeżeń, dodamy odpowiednimi stronami, to otrzymamy:

$$\begin{aligned}x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 &= n \cdot S^2 + 2 S (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) + \\&+ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2.\end{aligned}\quad (d)$$

Z wyrazów dla poszczególnych wielkości α_{λ} wynika:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = A - A_1 + A - A_2 \dots + A - A_n,$$

więc:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = n A - (A_1 + A_2 + \dots + A_n).$$

Ze wzoru (a):

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n = n \cdot A,$$

przeto:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 0.$$

Uwzględniając wartość sumy czynników α_{λ} i używając symbolu Σ dla oznaczenia sumy, otrzymamy z równania (d):

$$\Sigma x_{\lambda}^2 = n \cdot S^2 + \Sigma \alpha_{\lambda}^2,$$

stąd:

$$\frac{\Sigma x_{\lambda}^2}{n} = S^2 + \frac{\Sigma \alpha_{\lambda}^2}{n}.$$

Według wzoru (b):

$$\frac{\Sigma x_{\lambda}^2}{n} = s^2,$$

przeto:

$$s^2 = S^2 + \frac{\Sigma \alpha_{\lambda}^2}{n} \dots \dots \dots (e)$$

Rozważmy jeszcze przypadek pomiaru złożonego. Dla wyznaczenia pewnej wielkości A , mierzymy kilka innych, $a_1, a_2 \dots a_m$. Zależność A od $a_1, a_2 \dots a_m$ wyraża się, biorąc ogólnie pewną funkcją:

$$A = f(a_1, a_2 \dots a_m).$$

Błąd przy wyznaczeniu wielkości A oznaczmy przez x , a przy pomiarze wielkości a_1, a_2 i t. d. przez x_1, x_2 i t. d.

Wtedy według § 1 niniejszego rozdziału:

$$x = \frac{\partial f}{\partial a_1} \cdot x_1 + \frac{\partial f}{\partial a_2} \cdot x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial a_n} \cdot x_n.$$

Po podniesieniu obu stron równania do drugiej potęgi, otrzymamy:

$$x^2 = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial a_\lambda} \right)^2 \cdot x_\lambda^2 + 2 \sum \frac{\partial f}{\partial a_\lambda} \cdot \frac{\partial f}{\partial a_\mu} \cdot x_\lambda \cdot x_\mu.$$

Jeżeli pomiar każdej wielkości a_1, a_2 i t. d. powtarzamy po n razy, to powyższych równań otrzymamy n , a dodając te równania odpowiednimi stronami i dzieląc przez n , znajdziemy wzór dla kwadratów błędów średnich. Ze względu na pewne prawdopodobieństwo otrzymywania błędów dodatnich i ujemnych, przyjmujemy:

$$\sum 2 \sum \frac{\partial f}{\partial a_\lambda} \cdot \frac{\partial f}{\partial a_\mu} \cdot x_\lambda \cdot x_\mu = 0.$$

Wtedy:

$$s^2 = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial a_\lambda} \right)^2 \cdot s_\lambda^2,$$

a przeto:

$$s = \pm \sqrt{\sum \left(\frac{\partial f}{\partial a_\lambda} \right)^2 \cdot s_\lambda^2}.$$

Przykład I. Załóżmy, że mamy funkcję: ¹⁾

$$A = a_1 \cdot a_2.$$

A, a_1 i a_2 są średnimi wartościami, otrzymanymi z pomiarów, wtedy:

$$\frac{\partial A}{\partial a_1} = a_2, \quad \frac{\partial A}{\partial a_2} = a_1,$$

więc:

$$s = \pm \sqrt{a_2^2 \cdot s_1^2 + a_1^2 \cdot s_2^2}.$$

Przykład II. Załóżmy, że mamy funkcję:

$$A = a_1 + a_2.$$

¹⁾ a_1, a_2 wyznaczamy za pomocą pomiaru prostego.

A , a_1 i a_2 są średnimi wartościami, otrzymanymi z pomiarów, wtedy:

$$\frac{\partial A}{\partial a_1} = 1, \quad \frac{\partial A}{\partial a_2} = 1,$$

więc:

$$s = \pm \sqrt{s_1^2 + s_2^2}.$$

4. Błąd największy i najmniejszy pomiaru. Gdy uwzględnimy błędy systematyczne i błędy przypadkowe, to suma tych błędów wskaże nam całkowity błąd pomiaru.

Suma arytmetyczna wszystkich błędów systematycznych i największego możliwego błędu przypadkowego, stanowi tak zwany **błąd graniczny**, od którego nie może być większy żaden błąd pomiaru.

Oznaczmy całkowity błąd pomiaru przez X , sumę błędów systematycznych przez x , a błąd przypadkowy wartości średniej przez S , wtedy:

$$X = x + S.$$

Wykonywając pomiar bardzo starannie i powtarzając go wielokrotnie, możemy otrzymać S bardzo małe, zawsze jednak będzie:

$$X > x.$$

Najmniejszy błąd możliwy do osiągnięcia przy pomiarze jest zawsze większy od błędu systematycznego, którego w danych warunkach pomiaru usunąć nie można.

Większa część pomiarów elektrotechnicznych ma tak wielkie błędy systematyczne, że błędy przypadkowe przy starannym wykonaniu pomiaru są znikomo małe; wtedy powtarzanie wielokrotne pomiaru nie daje możliwości zmniejszenia popełnianego błędu, dlatego też, jak to wspomniałem poprzednio, tylko w wyjątkowych przypadkach warto powtarzać pomiar więcej, niż np. trzy razy.

Rozważmy przykład pomiaru oporu mostkiem Wheatstone'a przy zastosowaniu prostych skrzynek oporowych. Takie skrzynki, jak to podano w § 5, wzorcują się z dokładnością do 0,2%. W tych warunkach doprowadzanie wartości błędów przypadkowych do setnej części procentu nie ma żadnego praktycznego znaczenia.

Pozatym zachodzą często wpływy postronne, które nieraz nie dają się usunąć i wywołują błędy znacznie przewyższające dokładność odczytań badacza. Do takich wpływów przy pomiarze oporu mostkiem Wheatstone'a należą prądy termoelektryczne, wywołujące niespodziewane odchylenia galwanometru i zmniejszające wskutek tego wielokrotnie dokładność pomiarów.

5. Dane liczbowe. Ażeby ułatwić wymiarkowanie, jaką mianowicie dokładność osiągnąć się daje przy pomiarach elektrycznych, przytaczam tu szereg liczb, wyrażających błędy względne, popełniane przy wyznaczaniu różnych wielkości.

Wielkość wzorca oma, sporządzonego z rtęci, znana jest z dokładnością do 0,02%.

Ilość srebra, wydzielonego przez prąd o sile jednego ampera w ciągu sekundy, znana jest z dokładnością do 0,05%.

Siłę elektromotoryczną ogniwa normalnego Westona wyznaczamy z dokładnością do 0,02%.¹⁾

Wielkość oporów normalnych z manganinu wyznaczamy z dokładnością od 0,015 do 0,02%.

Wielkość oporów w skrzynkach oporowych dokładnych podaje się zazwyczaj z dokładnością do 0,05%, w skrzynkach zaś prostych z dokładnością do 0,2%.

Kondensatory wyrabiane są z różną dokładnością. Dokładne kondensatory mikowe o pojemności od 0,5 do 0,001 μF dają się wykonać i wymierzyć z dokładnością od 0,5% do 5%, a to zależnie od pojemności.

Dokładne kondensatory z izolacją papierową wymierzane są z dokładnością do 5%. Kondensatory techniczne papierowe mają zwykle pojemność, określoną z dokładnością do 10%.

Dokładne amperomierze i woltomierze ze skalą zwierciadłową, o ile są w dobrym stanie, dają wskazania z błędem w granicach od 0 do 1%. Skale w tych przyrządach zaopatrzone w zwierciadła, mają takie podziałki, że wskazanie można odczytywać przy małych odchyleniach z dokładnością około 2%, a przy większych odchyleniach — z dokładnością około 0,15%.

Przyrządy pomiarowe techniczne, mianowicie: amperomierze, woltomierze i watomierze, wskazują zwykle z błędem, wynoszącym od jednego do kilku procent. Skale w tych przyrządach mają podziałki zazwyczaj dość duże, a wskazówki z grubymi końcami, skutkiem czego przy małych odchyleniach odczytywanie wskazań możliwe jest z błędem od 2% do 10%, przy znacznych zaś odchyleniach — z błędem od 0,5 do 1%.

Liczniki pracy prądu uważane są za zdatne do użytku, gdy błąd wynosi od $\pm 12\%$ do $\pm 6,6\%$ przy zmianie siły prądu głównego od 0,1 J do J , gdzie J oznacza prąd normalny, dla którego licznik został zbudowany.²⁾

¹⁾ Siła elektromotoryczna ogniwa Westona wyznacza się przez porównanie z napięciem na końcach znanego oporu, prąd przepływający przez ten opór mierzy się za pomocą wyznaczania ilości srebra, wydzielonej z roztworu azotanu srebra w określonym czasie.

²⁾ Błędy dopuszczalne w licznikach określają szczegółowe przepisy, wydawane przez zarządy elektrowni i inne instytucje.

UZUPEŁNIENIE.

ROZDZIAŁ XL.

Zasady rachunku wektorowego, w zastosowaniu do rozważania prądów zmiennych.

1. **Określenia zasadnicze.** Zależność od czasu pewnej wielkości zmiennej w czasie można wyrazić analitycznie i wykreślić. Jeżeli wielkość ta zmienia się sinusoidalnie, to wyrażenie matematyczne jest następujące:

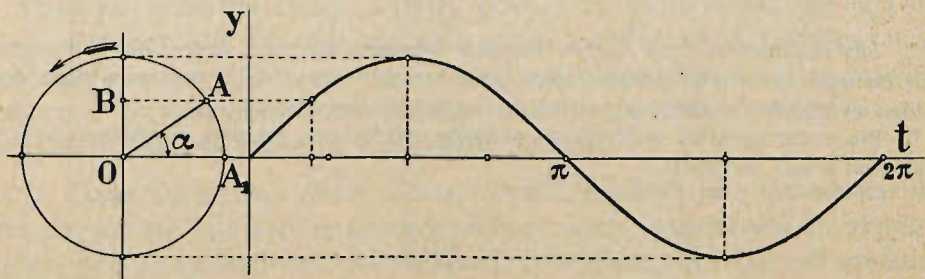
$$y_t = y \cdot \sin \left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi \right). \quad (a)$$

y_t — wartość wielkości y w chwili t ,
 y — wartość maksymalna tej wielkości,
 T — okres zmienności,
 φ — kąt stały.
 t — czas—zmienny.

Linję krzywą, wyrażającą taką funkcję we współrzędnych prostokątnych y i t , nazywamy sinusoidą.

Sinusoida może być wykreślona za pomocą wyznaczania poszczególnych punktów w sposób następujący. Rozważmy przypadek, gdy $\varphi = 0$:

Bierzemy odcinek OA (rys. 418), którego długość wyrażać będzie w pewnej



Rys. 418.

skali wartość maksymalną wielkości y , a więc y , i zakładamy, że ten odcinek znajduje się w położeniu, wskazanym na rysunku, t. j. pod kątem α względem linii po-

ziomej. Rzutem tego odcinka na kierunek pionowy będzie odcinek \overline{OB} , zależność którego od długości odcinka \overline{OA} wyraża wzór:

$$\overline{OB} = \overline{OA} \cdot \sin \alpha.$$

Założmy następnie, że odcinek \overline{OA} obracać się będzie jednostajnie z prędkością kątową $\frac{2\pi}{T}$ około punktu O i że w chwili zero znajdzie się on w położeniu $\overline{OA_1}$; w takim razie:

$$\alpha = \frac{2\pi}{T} \cdot t,$$

a więc:

$$\overline{OB} = \overline{OA} \sin \frac{2\pi t}{T} \dots \dots \dots (b)$$

Z równania (a) na str. 406 przy $\varphi = 0$, wypada:

$$y_t = \bar{y} \cdot \sin \frac{2\pi t}{T}.$$

Porównyując to równanie z poprzednim równaniem (b) i mając na uwadze, że \overline{OA} wyraża \bar{y} , wnioskujemy, że \overline{OB} wyraża y_t .

Korzystając zaś z tego, że rzut odcinka OA na kierunek pionowy wyraża wartość wielkości y w danej chwili, z łatwością znaleźć można szereg punktów sinusoidy, wyznaczając dla różnych wartości czasu t rzuty odcinka OA na kierunek pionowy i odkładając t jako rzędne, a $OB = y_t$ jako odcięte.

Jeżeli mamy dwie wielkości sinusoidalnie zmienne y i y' o jednakowym okresie zmienności, osiągające wartość maksymalną nie jednocześnie, to wyrażenia matematyczne dla takich wielkości będą:

$$y_t = \bar{y} \cdot \sin \frac{2\pi t}{T},$$

$$y'_t = \bar{y}' \cdot \sin \frac{2\pi \cdot (t \pm \tau)}{T}.$$

Drugi z tych wzorów można napisać inaczej, mianowicie:

$$y'_t = \bar{y}' \cdot \sin \left(\frac{2\pi t}{T} \pm \frac{2\pi \tau}{T} \right),$$

albo, oznaczając $\frac{2\pi \tau}{T}$ przez φ , mamy:

$$y'_t = \bar{y}' \cdot \sin \left(\frac{2\pi t}{T} \pm \varphi \right).$$

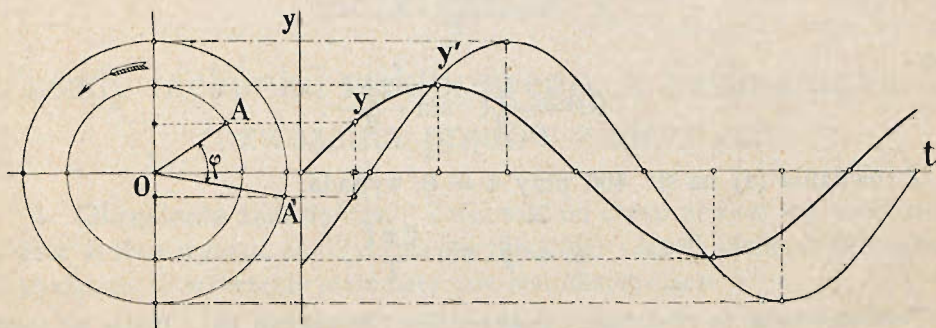
Na rys. 419 wykreślone są dwie sinusoidy za pomocą wyznaczania rzutów odcinków OA' i OA , obracających się z prędkością jednakową. Odcinki te tworzą kąt φ , który nie zmienia się przy ich obrocie.

W ten sposób otrzymane sinusoidy wyrażają zależność od czasu dwóch wielkości y i y' zmiennych sinusoidalnie, które można wyrazić wzorami:

$$y_t = y \cdot \sin \frac{2\pi t}{T},$$

$$y'_t = y' \cdot \sin \left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi \right).$$

Ponieważ wielkość y już przeszła przez wartość zero, gdy y' staje się zerem, mówimy, że wielkość y wyprzedza y' . Odpowiednio do tego widzimy na rysun-



Rys. 419.

ku, że odcinek OA w ruchu wyprzedza odcinek OA' . Sinusoida zaś, wyrażająca zmienność wielkości wyprzedzającej, jest przesunięta wstecz wzdłuż osi czasu, przy takim bowiem położeniu wzajemnym, rzędne tej sinusoidy wcześniej niż sinusoidy drugiej przechodzą przez odpowiednie fazy, np. wartości zerowe, maksymalne i t. p.

Można również mówić, że wielkość y' spóźnia się względem wielkości y ; wyraża to oczywiście to samo, co orzeczenie, że y wyprzedza wielkość y' . Odpowiednio do tego sposobu wyrażenia, z rysunku widzimy, że odcinek OA' spóźnia się względem odcinka OA .

Kąt φ nazywa się różnicą faz wielkości y i y' .

Można jednak różnicę faz wyrażać także w częściach okresu. Kąt 2π odpowiada całemu okresowi T , więc kąt φ będzie odpowiadał pewnej części okresu, która wyraża się ułamkiem:

$$\frac{\varphi}{2\pi}.$$

Tym sposobem jeżeli np. $\varphi = \frac{\pi}{2}$, to różnica faz wynosi $\frac{1}{4}$ część okresu, przy $\varphi = \pi$ pół okresu i t. d.

Z powyższych rozumowań widzimy, że dla wykreślenia sinusoid, wyrażających wielkości sinusoidalnie zmienne, znać musimy: długości odcinków, wyrażających wartości maksymalne, kąty, wskazujące różnicę faz pomiędzy poszczególnymi wielkościami, i długość okresu; te dane wystarczają wtedy, gdy nie chodzi o to, od kiedy ma być liczony czas przy wykreślaniu sinusoid. Opierając się na nich, można wyrażać wielkości sinusoidalnie zmienne o jednakowym okresie za pomocą

odcinków, wykreślonych pod pewnemi kątami, jeden względem drugiego, np. OA , OA' , OA'' (rys. 420); długość tych odcinków wyraża wartości maksymalne odpowiednich wielkości, a kąty φ i φ' wyrażają różnicę faz.

Taki sposób wyobrażania wykreślnego ma jednak tę złą stronę, że kąt pomiędzy dwoma odcinkami nie jest wielkością jednoznaczną.

Dwa odcinki a i b (rys 421) tworzą pomiędzy sobą dwa różne kąty φ' i φ'' , których suma $= 180^\circ$. Otóż, jeżeli mowa o różnicy faz, to niewiadomo, który z tych kątów ma tę różnicę wyrażać.

Dla uniknięcia tej dwuznaczności oznaczamy kierunek odcinków, mianowicie zaopatrujemy je na rysunku w strzałki (rys 422). Takim odcinkom o kierunku oznaczonym nadano nazwę **wektorów**. Różnicą faz będzie tu kąt φ pomiędzy wektorami, wybrany w taki sposób, ażeby oba kierunki wychodziły z wierzchołka kąta, jaki tworzą.

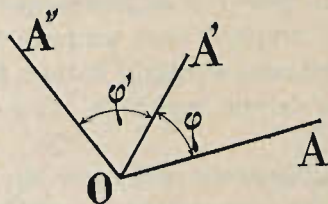
Właściwie i tutaj mogłaby być mowa jeszcze o kącie $360^\circ - \varphi$ i t. p., ale tego rodzaju kąty na wykresie sinusoid odpowiadają temu samemu ich położeniu, natomiast dwie sinusoidy, przesunięte o 180° , będą zupełnie różne.

Dla nadania wektorom zupełnie określonego znaczenia fizycznego, zachodzi jeszcze konieczność założenia, jaki kierunek wielkości zmiennej będzie przyjęty za dodatni, a więc np. przy sile prądu elektrycznego, płynącego przez lampkę (rys. 423), który z kierunków prądu, $adcb$, czy też $bcd a$, będzie uważany za dodatni? Jeżeli zaś chodzi np. o napięcie na lampce e_{dc} , to jaki kierunek napięcia przyjęty będzie za dodatni, od d do c , czy też od c do d ?

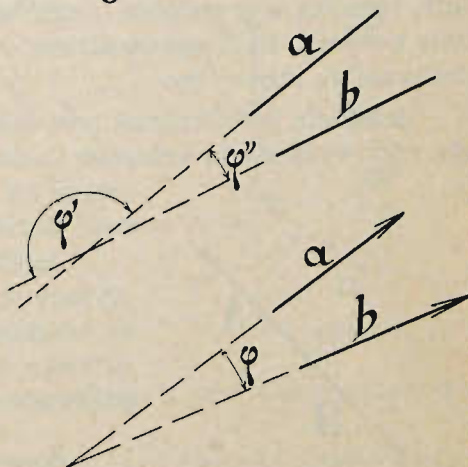
Nadto należy jeszcze zwrócić uwagę na tę okoliczność, że w praktyce mamy bardzo rzadko do czynienia z wartościami maksymalnymi rozważanych tu wielkości, przeważnie zaś z wielkościami czynnymi, t. j. z pierwiastkami kwadratowymi z przeciętnej kwadratów.

Z rozdziału I wiemy, że wartość czynna wyraża się wzorem:

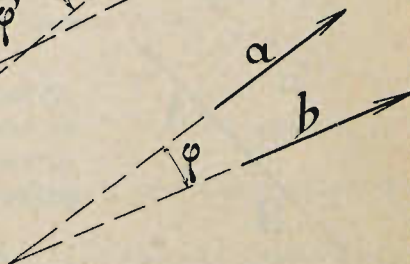
$$y = \frac{\bar{y}}{\sqrt{2}},$$



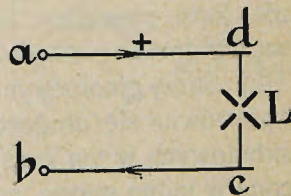
Rys. 420.



Rys. 421.



Rys. 422.



Rys. 423.

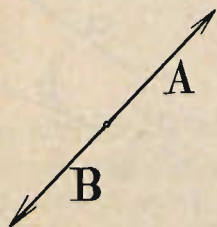
można więc przyjąć, że wektor wyraża również, aczkolwiek w pewnej odmiennej skali, wartość czynną.

Z powyższego rozumowania wynika, że, zakładając pewien dodatni kierunek dla siły prądu, napięcia lub siły elektromotorycznej i t. p., możemy w przypadku zmienności okresowej tych wielkości, wyrazić je za pomocą wektorów, poprowadzonych pod pewnemi względem siebie kątami. Długości tych wektorów wyrażają w pewnej przyjętej skali wartości czynne odpowiednich wielkości, kąty zaś pomiędzy wektorami wyrażają różnicę faz.¹⁾ Skala dla wektorów wielkości jednorodnych na danym wykresie musi być oczywiście dla wszystkich wektorów jednakowa.

Przy stosowaniu wektorów do wyobrażania wielkości sinusoidalnie zmiennych, kierunek w przestrzeni pierwszego wektora jest dowolny; następne zaś wektory powinny być poprowadzone względem pierwszego pod pewnemi kątami, stosownie do różnicy faz.

Jeżeli dla jakichkolwiek powodów wypadnie zmienić kierunek dodatni, przyjęty przy wykreślaniu wektorów, pamiętać należy o tym, że odpowiedni wektor zmieni się wtedy również na odwrotny, albowiem wartości dodatnie staną się wtedy ujemnemi i odwrotnie.

Jeżeli więc np. wektor A (rys. 424) wyraża prąd płynący w obwodzie lampy (rys. 423), przy dodatnim kierunku prądu $adcb$, to w razie zmiany kierunku dodatniego na $bcd a$, wypadnie wyrazić ten sam prąd za pomocą wektora B (rys. 424).



Rys. 424.

Sposób przedstawiania za pomocą wektorów wielkości sinusoidalnie zmiennych ma nader ważne znaczenie ze względu na ułatwienie w dodawaniu i odejmowaniu tych wielkości w tym przypadku, gdy okresy tych wielkości są jednakowe.

2. Dodawanie wektorów. Dajmy na to, że mamy dowolną liczbę wektorów (rys. 425), np. y^I , y^{II} , y^{III} i y^{IV} , które wyrażają wielkości zmiennie sinusoidalnie, kąty pomiędzy temi wektorami przedstawiają różnicę faz pomiędzy poszczególnymi wielkościami.

Sumę geometryczną takich wektorów stanowić będzie wektor, którego długość równa się długości zamykającego boku wielokąta, utworzonego z wektorów składowych w ten sposób, że strzałki wszystkich wektorów składowych są zwrócone w jedną stronę, np. w kierunku ruchu wskazówek zegarka. Wektor, wyrażający sumę, ma strzałkę zwróconą w stronę odwrotną względem strzałek innych wektorów.

Na rys. 426 wektor y jest sumą wektorów y^I , y^{II} , y^{III} , y^{IV} . Ma on tę własność, że suma algebraiczna rzutów wektorów składowych na pewien dowolny

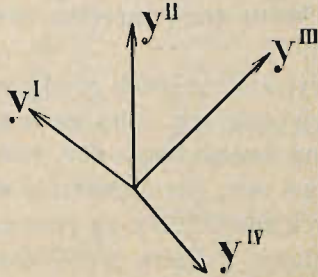
¹⁾ Jeżeli wielkość y_1 wyprzedza y_2 , to wektor y_1 kreśli się dalej o kąt różnicy faz w kierunku odwrotnym względem ruchu wskazówek zegarka, ponieważ ten kierunek przyjmujemy jako kierunek dodatni obrotu wektorów.

kierunek równa się rzutowi wektora, wyrażającego sumę, czyli wektora wypadkowego.

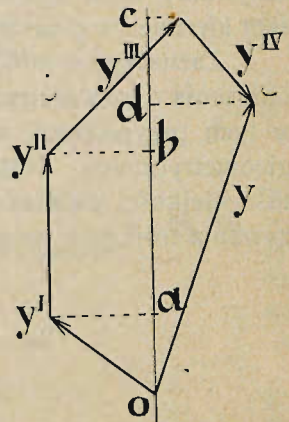
Z rys. 426 widzimy, że :

$$\overline{od} = \overline{oa} + \overline{ab} + \overline{bc} = \overline{cd}.$$

Wektory wyrażają wielkości sinusoidalnie zmienne o okresie jednakowym, przeto suma rzutów tych wektorów na kierunek pionowy będzie wyrażała sumę wartości chwilowych tych wielkości.



Rys. 425.



Rys. 426.

Ta suma rzutów równa się, jak widzieliśmy, rzutowi wektora wypadkowego, więc rzut ten w każdej chwili będzie wyrażał sumę wartości chwilowych powyższych wielkości. Z tego wynika, że suma szeregu wielkości sinusoidalnie zmiennych jest wielkością również sinusoidalnie zmienną i że

wektor, wyrażający tę sumę, jest wektorem wypadkowym, otrzymanym przez dodawanie geometryczne wektorów składowych.

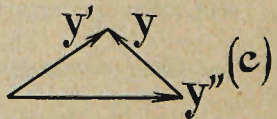
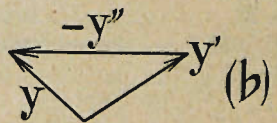
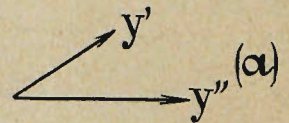
Jeżeli wektory składowe wyrażają w pewnej skali wartości czynne wielkości składowych, to oczywiście wektor wypadkowy będzie wyrażał w tej samej skali wartość czynną sumy.

Taką sumę wartości czynnych danych wielkości, dla odróżnienia jej od zwykłej sumy algebraicznej, nazywamy sumą geometryczną. Szczególnie ważne znaczenie, przy zastosowaniu dodawania wektorów do prądów zmiennych, ma ten przypadek, kiedy suma równa się zeru; wtedy, jak widać z rys. 426, y będzie $= 0$ i wielobok wektorów składowych będzie zamknięty.

3. Odejmowanie wektorów. Różnicą geometryczną dwóch wektorów y' i y'' [rys. 427 (a)], nazywamy wektor y , stanowiący sumę wektorów y' i $(-y'')$ [rys. 427 (b)].

Łatwo spostrzedz, że wektor, otrzymany przez połączenie końców wektorów y' i y'' [rys. 427 (c)], ze strzałką, zgodną z odjemnikiem y'' , wyraża również sumę $y' + (-y'')$, a więc jest różnicą wektorów y' i y'' .

Na podstawie podobnego rozumowania, jak przy dodawaniu, łatwo przyjdzie nam do wniosku, że różnica dwóch wielkości sinusoidalnie zmiennych jest wielko-



Rys. 427.

ścią również sinusoidalnie zmienną i wyraża się za pomocą wektora, stanowiącego różnicę geometryczną wektorów wielkości składowych.

4. Rozwiązywanie równań. Mając w ten sposób określone działania dodawania i odejmowania, możemy zestawiać równania geometryczne i przekształcać je tak, jak równania algebraiczne, mając oczywiście na względzie zawsze znaczenie symbolów $(+)$, $(-)$ i $(=)$.

Co do znaku równości, należy pamiętać, że w rachunku wektorowym równymi nazywamy takie wektory, które mają nie tylko równe długości, ale zarazem ten sam kierunek w przestrzeni.

Zaznaczyć w końcu wypada, że jeżeli chodzi tylko o powzięcie pewnego wyobrażenia o rozważanych wielkościach, albo też o niezbyt dokładne obliczenia, to w tych przypadkach można śmiało stosować rozwiązywanie wykresne równań geometrycznych. Natomiast tam, gdzie chodzi o wyniki możliwie dokładne, wartość wielkości niewiadomych znajdujemy za pomocą trygonometrycznego rozwiązywania trójkątów na podstawie wykresu przybliżonego.



Spis alfabetyczny.

	<i>Str.</i>
Akumulatory	167
Amper	8, 291
Amper międzynarodowy	301
Amperogodzina	12, 291, 293
Amperomierz	309
Amperozwoje	59
Arrheniusa teoria	152
Bateria ogniw	104
Bateria termoelektryczna	147
Bezwzględna jednostka oporu	297
Bezwzględna jednostka siły prądu	294
Bezwzględny układ jednostek elektroma- gnetycznych	283
Bezwzględny układ jednostek elektro- statycznych	281
Błąd bezwzględny pomiarów	396
Błąd względny pomiarów	396
Błąd średni	402
Błędy — dane liczbowe	404
Błędy przypadkowe	398
Błędy systematyczne	398
Bocznik (amperomierza)	321
Busola stycznych	294
Centymetr	272
Coulomba wzór dla mas elektrycznych	77
Coulomba wzór dla mas magnetycznych	5
Częstościomierze	366
Czynne napięcie prądu	14
Czynna wielkość prądu zmiennego	8
Depolaryzator	165
Deprez-d'Arsonvala galwanometr	308
Diamagnetyczne ciała	38
Dodawanie wektorów	410
Drgań elektrycz. okres własny	263
Dział	14, 273, 293
Dźilbert	59
Ekwipotencjalna powierzchnia przewodnika	82
Elektrochemiczny równoważnik	151
Elektroliza	149
Elektromagnesów siła przyciągania	199
Energja chemiczna	167

	<i>Str.</i>
Energja elektryczna	219
Energja magnetyczna	195
Energja mechaniczna	1
Erg	273
Erg na sekundę	273
Ersztet	59
Fale elektryczne	264
Farad	86, 291, 293
Faraday'a prawo (elektroliza)	151
Foucaulta prądy	223
Faz różnica	408
Ferromagnetyczne ciała	38
Galwanometr	306
Galwanoskop	306
Gaus	48, 79, 283
Gaz zjonizowany	27
Gęstość linii indukcji	47
Gęstość ładunku elektrycz.	85
Gęstość masy magnetycz.	33
Gram	272
Henry	71, 292, 293
Histereza	42
Histerezy ciepło	228
Histereza dielektryczna	87
Ilość elektryczności	11, 77, 95
Indukcja magnetyczna	28, 36
Indukcji elektromotoryczna siła	180, 182
Impedancja	118
Induktancja	112
Izolatory	81
Jałowy prąd	238
Jednostek elektromagnetycz. układ bez- względny	283
Jednostek elektrostatycznych układ bez- względny	281
Jednostka przewodnictwa	22
Jednostki	270
Jonizacja	153
Jony	150
Joule'a ciepło	17, 139

	Str.
Kalorja	273
Kilogramometr	273
Kilowat	15, 274
Kilowatgodzina	14, 273, 293
Kilowolt	293
Kirchhoffa prawo	95
Kirchhoffa prawo (prąd stały)	97
Kirchhoffa prawo (prąd zmienny)	128
Koercja magnetyczna	43
Kompensacyjny sposób porównania sił elektromotorycznych	323
Kondensator	82
Kondensator wzorcowy	387
Koń mechaniczny	274, 293
Kształt krzywej siły elektromotorycznej	19
Krzywa magnet. w żelazie	64
Kulomb	12, 291, 293
Kwadrant	292
Laplace'a wzór	7
Lenza prawo	181
Lewej ręki prawo	176
Liczba linii indukcji	47
Liczniki	350
Linje indukcji magnetycz.	30
Linje sił elektrycznych	78
Linje sił magnetycznych	30
Lorenz	297
Ładunek elektryczny = ilość elektyczności	77
Ładunek szcztkowy	87
Magnetomotoryczna siła	59
Magnetycz. własności żelaza badanie	390
Magnetyzm szcztkowy	43
Makswel	48, 284
Maksymalna siła prądu	8
Maksymalna wartość napięcia	14
Masa magnetyczna	5
Maxwella prawo	181
Maxwella wzór	199
Mechaniczna praca	177, 179
Mechaniczna siła	173 185, 188
Megom	293
Mikrofarad	86, 291, 293
Miliwolt	293
Moc prądu	13
Moc pozorna prądu	237
Moc prądu zmiennego	234
Mocy prądu spółczynnik	237
Mostek Wheathstona	373

	Str.
Napięcie prądu	13
Napięcie czynne prądu	14
Napięcie w strumieniu magnet.	200
Naskórkowe działanie (skinefekt)	126
Natężenie pola elektrycznego	78
Natężenie pola magnetycznego	6
Natężenie prądu = siła lub wielkość	5
Natężenie rozmagnesowujące	29
Obojętne magnetycznie ciała	38
Obwód magnetyczny	55
Obwód magnetyczny doskonały	60
Obwód magnetyczny niedoskonały	61
Obwód magnesów stałych	65
Obwód prądu	2
Odbieracze prądu	2
Odejmowanie wektorów	411
Ogniwa galwaniczne	160
Ohma prawo	91
Ohma prawo (prąd stały)	95
Ohma prawo (prąd zmienny)	109
Om	21, 291, 293
Om międzynarodowy	301
Omomierze	379
Oporów wielkich mierzenie	376
Oporniki skrzynkowe	374
Oporu mierzenie	371
Opór indukcyjny	112
Opór magnetyczny	59
Opór omiczny	21
Opór omiczny (prąd zmienny)	109
Opór omiczny dla prądów szybkozmien- nych	126
Opór pojemności	113
Opór właściwy	22
Opór wypadkowy (prąd stały)	98, 100
Opór wypadkowy (prąd zmienny, połą- czenie równoległe)	130
Opór wypadkowy (prąd zmienny, połą- czenie szeregowo)	121
Oscylacyjny prąd	262
Oscylografiy	368
Paramagnetyczne ciała	38
Pellat	295
Peltiera ciepło	141
Pętlica histerezy	43, 229
Pojemność kondensatora	83, 85
Pojemności mierzenie	385
Polaryzacja dielektryczna	88
Polaryzacja elektrolityczna	161
Pole elektryczne	78

	Str.
Pole magnetyczne	6
Postacie energii	1
Potencjał	13, 78
Potencjał przewodników (okładek kondensatora)	82
Praca mechaniczna	177, 179
Praca prądu	13
Pracy mierzenie	348
Prawej ręki prawo	182
Prawidło śruby	7, 59
Prawo Joule'a	21
Prąd stały	8
Prądy zmiennne	8
Prędkość światła (fale elektromagnetyczne)	2, 267, 290
Prężność roztwórca	159
Przenikliwość lub zdolność magnetyczna	5
Przewodnictwa jednostka	22
Przewodnictwo	22
Przewodnictwo właściwe	22
Przewodnictwo wypadkowe	101
Przewodniki	81
Reaktancja	112
Reluktancja = opór magnetyczny	60
Rezonans napięć	123
Roboczy prąd	238
Równoważnik elektrochemiczny	151
Samoindukcja	67
Sekunda	272
Siła elektromotoryczna	16
Siła elektromotoryczna indukcji	180, 182
Siła elektromotoryczna samoindukcji	67
Siła magnetomotoryczna	59
Siła mechaniczna	173, 185, 188
Siła prądu (wielkość, natężenie)	5, 7
Siła przyciągania elektromagnesów	199
Sinusoida	9, 406
Spolaryzowany izolator	82, 89
Spółczynnik kształtu krzywej siły elektromotorycznej	19
Spółczynnik indukcji wzajemnej	206
Spółczynnik magnetyczny	35
Spółczynnik rozproszenia	61
Spółczynnik samoindukcji	70
Spółczynnika mocy mierzenie (prąd trójfazowy)	344
Spółczynnika samoindukcji mierzenie	388
Średnia wielkość prądu	10
Stała czasu	249
Stała dielektryczna	87

	Str.
Straty energii w żelazie	231
Struga = rurka indukcji	51, 60
Strumień indukcji magnetycznej (strumień magnetyczny)	47
Strumień sił	49
Szczałkowy ładunek	87
Szczałkowy magnetyzm	43
Temperatura przewodników (wzrost)	140
Termodynamiki druga zasada	3
Termoelektryczność	144
Thomsona ciepło	141
Thomsona mostek	372
Trójfazowy prąd (mierzenie mocy)	338
Układy jednostek w elektromagnetyzmie	274, 281, 283, 291
Volty prawo	142
Wartość najprawdopodobniejsza otrzymana z pomiarów	400
Wat	15, 274, 293
Watogodzina	14
Watomierz	335
Wektor	409
Westona ogniwo	304
Wheatstona mostek	373
Wirowe prądy	223
Wolt	14, 291, 293
Woltamper	237
Woltomierz	326
Wyładowanie kondensatora ciągle	252
Wyładowanie kondensatora oscylacyjne	254
Wymiary jednostek	271, 274, 280
Wytrzymałość izolatora na przebicie	26
Wzorcowanie amperomierza	322
Wzorcowanie liczników	365
Wzorcowanie watomierzy	347
Wzorcowanie woltomierza	331
Wzorzec ampera	301, 304
Wzorzec oma	301
Załamianie linii indukcji	54
Zasada zachowania energii	3
Zasada zachowania ilości elektryczn.	4
Zawada	112
Zdolność elektryczna	77, 87
Zdolność magnetyczna	5, 29
Zmienne prądy	8
Źródło prądu	2

